6 ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ

Задача интерполирования состоит в том, чтобы по значению функции f(x) в нескольких точках отрезка восстановить ее значение в остальных точках этого отрезка. Разумеется, эта задача имеет сколь-угодно много решений. Задача интерполирования возникает, например, в том случае, когда известны результаты измерений $y_k = f(x_k)$ некоторой физической величины $f(x)$ в точках $x_k, k = 0,1,...,n$ и требуется определить значения в других точках.

6.1 Интерполяционная формула Лагранжа

Пусть на отрезки $a \le x \le b$ заданы точками $x_k, k = 0,1,...,n$ (узлы интерполирования), в которых известны значения функции $f(x)$. Задача интегрирования алгебраическими многочленами состоит в том, чтобы построить многочлен

$$L_n(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n \tag{30}$$

степени n, значение, которого в заданных точках $x_k, k = 0,1,...,n$ совпадают со значениями функции $f(x_n)$ в этих точках.

Для любой непрерывной функции $f(x_n)$ сформулированная задача имеет единственное решение. Действительно для отыскания коэффициентов $a_0, a_1,...,a_n$ получаем систему линейных уравнений:

$$\begin{aligned} &a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + ... + a_n x_i^n = f(x_i) \\ &i = 0,1,...,n \end{aligned} \tag{31}$$

Определитель которого (определитель Вандермонда) отличен от нуля, если среди точек $x_i, i = 0,1,...,n$ нет совпадающих.

Многочлен $L_n(x)$ удовлетворяющий условиям

$$L_n(x_i) = f(x_i); i = 0,1,...,n \tag{32}$$

называется интерполяционным многочленам для функции $f(x)$ построенным по узлам $\{x_i\}_0^n$.

Интерполяционная формула Лагранжа позволяет представить $L_n(x)$ в виде линейной комбинации:

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k(x) f(x_k) \tag{33}$$

значений функции $f(x)$ в узлах интегрирования.

Найдем явное выражение для коэффициентов $C_k(x)$. Из условий (32) получаем:

$$\sum_{k=0}^{n} C_n(x_i) f(x_k) = f(x_i) \; ; \; i = 0,1,...,n$$

Эти соотношения будут выполнены, если на функции $C_k(x)$ наложить условия:

$C_k(x_i) = \begin{cases} 0 & i \neq k \\ 1 & i = k \end{cases}$, $i = 0,1,...,n$, которые означают, что каждая из функции $C_k(x)$, $i = 0,1,...,n$ имеет не менее n нулей на $[a,b]$. Поскольку $L_n(x)$ - многочлен степени n, коэффициенты $C_k(x)$ естественно искать также в виде многочленов степени n, а именно в виде $C_k(x) = \lambda_k (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})...(x - x_n)$. Из условия $C_k(x_k) = 1$ находим:

$\lambda_k^{-1} = (x_k - x_0)(x_k - x_1)...(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})...(x_k - x_n)$

Таким образом:

$$C_k(x) = \frac{\prod_{j \neq k} (x - x_j)}{\prod_{j \neq k} (x_k - x_j)}. \tag{34}$$

Часто коэффициенты $C_k(x)$ записывают в другом виде. Введем многочлен $\omega(x)$ степени n+1:

$$\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{k-1})(x - x_k)(x - x_{k+1})...(x - x_n) \tag{35}$$

тогда $\prod_{j \neq k} (x - x_j) = \frac{\omega(x)}{(x - x_k)}$

$\omega' = (x_k - x_0)...(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})...(x_k - x_n) \Rightarrow$

$$\prod_{j\neq k}(x_k - x_j) = \omega'(x_k) \quad \Rightarrow \quad C_k(x) = \frac{\omega(x)}{(x - x_k)\omega'(x_k)}$$

Итак, интерполяционный многочлен Лагранжа имеет вид:

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\omega(x)}{(x - x_k)\omega'(x_k)} f(x_k) \tag{36}$$

или

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\prod_{j\neq k}(x - x_j)}{\prod_{j\neq k}(x_k - x_j)} f(x_k) \tag{37}$$

6.2Интерполяционная формула Ньютона

Пусть в узлах $x_k \in [ab], k = 0,1,\ldots,n$ известны значения функции $f(x)$. Предполагаем, что среди точек χ_k нет совпадающих.

Разделенными разностями первого порядка называются отношения:

$$f(x_i, x_j) = \frac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i}, i, j = 0,1,\ldots,n; i \neq j$$

Разделенные разности второго порядка:

$$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{f(x_1, x_2) - f(x_0, x_1)}{x_2 - x_0}$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{f(x_2, x_3) - f(x_1, x_2)}{x_3 - x_1}, \ldots, f(x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) = \frac{f(x_{n-1}, x_n) - f(x_{n-2}, x_{n-1})}{x_n - x_{n-2}}$$

Аналогично определяются разделенные разности более высокого порядка. Например, если известны разности n-го порядка

$f(x_j, x_{j+1},\ldots,x_{j+k}), f(x_{j+1}, x_{j+2},\ldots,x_{j+k+1})$, то разделенная разность (к+1)-го порядка определяется так:

$$f(x_j, x_{j+1},\ldots,x_{j+k+1}) = \frac{f(x_{j+1}, x_{j+2},\ldots,x_{j+k+1}) - f(x_j,\ldots,x_{j+k})}{x_{j+k+1} - x_j}$$

Разделенная разность к-го порядка следующим образом выражается через значение функции $f(x)$ в узлах:

$$f(x_j, x_{j+1},...,x_{j+k}) = \sum_{i=j}^{j+k} \frac{f(x_i)}{\prod\limits_{\substack{e\neq i \\ e=j}}^{j+k} (x_i - x_e)}$$

Интерполяционным многочленом Ньютона называется многочлен:

$$P_n(x) = f(x_0) + (x - x_0) f(x_0, x_1) + (x - x_0)(x - x_1) f(x_0, x_1, x_2) + \\ + ... + (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1}) f(x_0, x_1,..., x_n) \qquad (38)$$

Можно показать, что $P_n(x) = L_n(x)$.

Интерполяционную формулу Ньютона удобнее применять в том случае, когда интерполируется одна и та же функция f(x), но число узлов постепенно увеличивается. Если узлы интерполяции фиксированы и интерполируется не одна, а несколько функций, то удобнее пользоваться формулой Лагранжа.

6.3 Погрешность интерполирования

Заменяя функцию f(x) интерполяционным многочленом Ln (x), мы допускаем погрешность rn (x) = f(x) - Ln (x), которая называется погрешностью интерполирования или, что то же самое, остаточным членом интерполяционной формулы. Ясно, что в углах интерполирования эта погрешность равна нулю.

Оказывается, можно доказать, что погрешность интерполирования можно представить в виде:

$$f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega(x) \qquad (39)$$

где ξ некоторая точка $\in [a,b]$

$$\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_n)$$

Из этой формулы следует оценка:

$$\left| f(x) - L_n(x) \right| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \left| \omega(x) \right|, \qquad (40)$$

где $M_{n+1} = \sup\limits_{x\in[a,b]} \left| f^{(n+1)}(x) \right|$

В частности, если $f(x)$ - алгебраический многочлен степени n, то интерполирование, проведенное по любым точкам $x_0, x_1, ..., x_n$, осуществляется точно, т.е. $L_n(x) \equiv f(x)$

Поскольку многочлены Лагранжа и Ньютона отличаются только формой записи, представление погрешности в форме (39) справедливо как для формулы Лагранжа, так и для формулы Ньютона.

6.4 Оптимальный выбор узлов интерполирования

Величину $|\omega(x)|$, входящую в оценку (40), можно минимизировать за счет выбора узлов интерполирования, т.е. подобрать узлы $x_k \in [a,b], k = 0,1,...,$ и так чтобы минимизировать величину $\max\limits_{x\in[a,b]}|(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_n)|$

Эта задача решается с помощью многочлена Чебышева:

$$T_{n+1}(x) = \frac{(b-a)^n}{2^{2n+1}} \cos((n+1)\arccos\frac{2x-(b+a)}{b-a}) \qquad (41)$$

причем в качестве узлов интерполирования надо взять корни многочлена (41), т.е. точки

$x_n = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\cos\frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}, k = 0,1,...,n$ при этом $\max\limits_{x\in[a,b]}|\omega(x)| = \frac{(b+a)^{n+1}}{2^{2n+1}}$ и

$$|f(x) - L_n(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}}$$

оценка (11) примет вид .

6.5 Интерполирование с кратными узлами

Интерполяционный многочлен Эрмита.

В узлах $x_k \in [a,b], k = 0,1,...,m$, среди которых нет совпадающих узлов, заданы значения функции $f(x_k)$ и её производных $f^{(i)}(x_k)$ до порядка $N_k - 1$ включительно, $i = 1,2,...,N_k - 1$. Таким образом, в каждой точке $x_k, k = 0,1,..., f^{(N_k-1)}(x_k)$ и, следовательно,

всего известно $N_0 + N_1 + ... + M_m$ величин. Требуется построить алгебраический многочлен $H_n(x)$ степени $n = N_0 + N_1 + ... + M_m - 1$, для которого

$$H_n^{(i)}(x_k) = f^{(i)}(x_k) \tag{42}$$

$k = 0,1,...,m;\ i = 0,1,...,N_k - 1$

Многочлен $H_n(x)$, удовлетворяющий условиям (13) называется интерполяционным многочленом Эрмита для функции $f(x)$. Число N_k называется кратностью узла x_k.